Apostila de Resistência dos Materiais I – Parte 2
Profª Eliane Alves Pereira
Turma: Engenharia Civil

Equilíbrio de uma Partícula

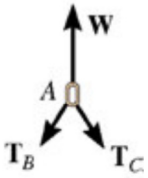
Condição de Equilíbrio do Ponto Material

Um ponto material encontra-se em equilíbrio estático desde que esteja em repouso ou então possua velocidade constante.
Para que essa condição ocorra, a soma de todas as forças que atuam sobre o ponto material deve ser nula, portanto:

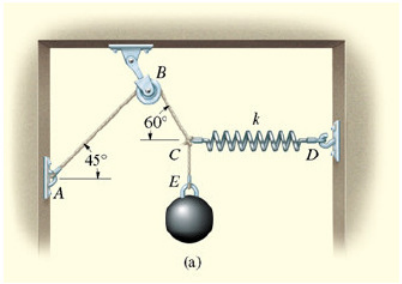
$$\sum F = 0$$

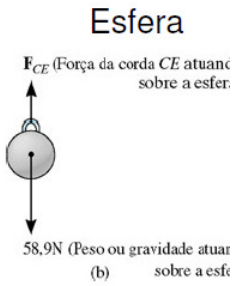
Diagrama de Corpo Livre

O diagrama de corpo livre representa um esboço do ponto material que mostra todas as forças que atuam sobre ele.

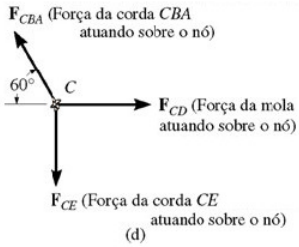


Exemplo de Diagrama de Corpo Livre (DCL)





Corda *CE*



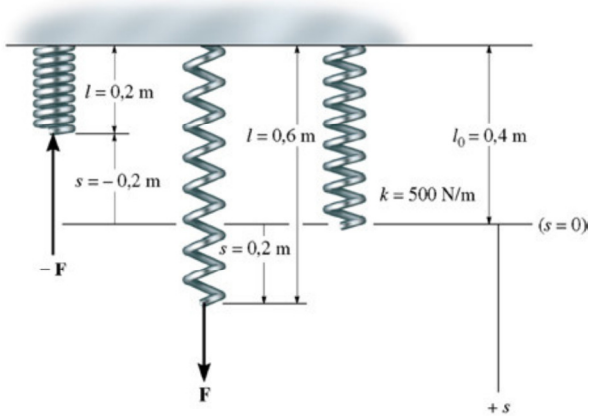
Nó *C*

Molas

Quando se utilizar uma mola elástica, o comprimento da mola variará em proporção direta com a força que atua sobre ela.
A equação da força atuante na mola é apresentada a seguir.

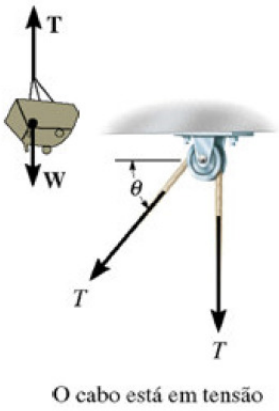
$$F = k \times s$$

k = Constante elástica da mola.
s = Deformação da mola.



Cabos e Polias

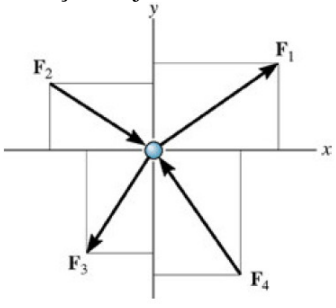
Cabos suportam apenas uma força de tração que atuam na direção do mesmo.



O cabo está em tensão

Equações de Equilíbrio

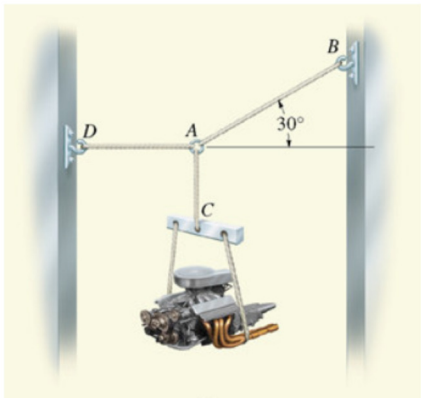
Se um ponto material estiver submetido a um sistema de vária forças coplanares e colineares, cada força poderá ser decomposta em componentes *x* e *y* e para a condição de equilíbrio é necessário que as seguintes condições sejam atendidas.



$$\sum F_x = 0 \quad e \quad \sum F_y = 0$$

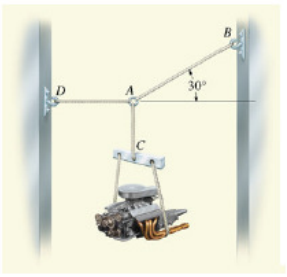
Exemplo:

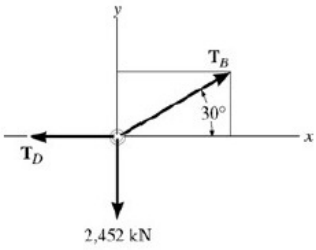
1) Determine a tensão nos cabos AB e AD para o equilíbrio do motor de 250kg mostrado na figura.



Solução:

a) DCL





b) Peso do motor:

$$P = mg \rightarrow P = 250kg \cdot \frac{9{,}8m}{s^2} \rightarrow P = 2.452N$$

c) Equações de equilíbrio:

$\sum F_x = 0 \rightarrow T_B \cdot \cos 30° - T_D = 0$ (I)

$\sum F_y = 0 \rightarrow T_B \cdot \sin 30° - P = 0$ (II)

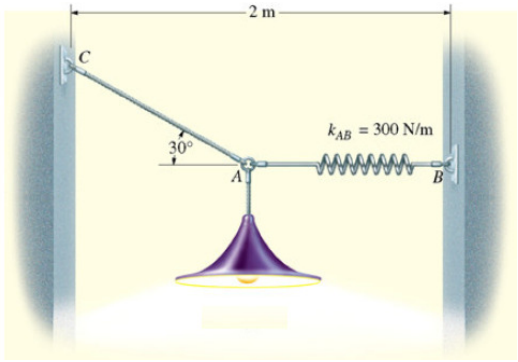
Resolvendo a equação II:

$$T_B \cdot \sin 30° - 2.452 = 0 \rightarrow T_B = \frac{2.452}{\sin 30°} \rightarrow T_B = 4.904N$$

Substituindo em I:

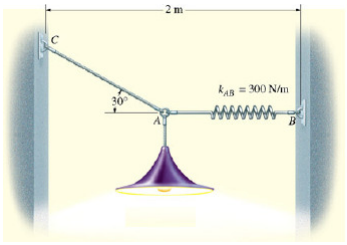
$$4.904 \cdot \cos 30° - T_D = 0 \rightarrow T_D = 4.904 \cdot \cos 30° \rightarrow T_D = 4.247N$$

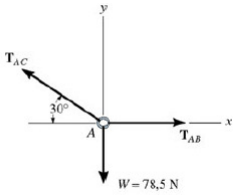
2) Determine o comprimento da corda AC da figura, de modo que a luminária de 8kg seja suspensa na posição mostrada. O comprimento não deformado da mola é l'_{AB} = 0,4m e a mola tem rigidez k_{AB} =300N/m.



Solução:

a) DCL





b) Peso da luminária:

$$P = mg \rightarrow P = 8kg \cdot \frac{9{,}8m}{s^2} \rightarrow P = 78{,}5N$$

c) Equações de equilíbrio:

$\sum F_x = 0 \rightarrow T_{AB} - T_{AC} \cdot \cos 30° = 0$ (I)

$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{AC} \cdot \sin 30° - P = 0$ (II)

Resolvendo a equação II:

$$T_{AC} \cdot \sin 30° - 78{,}5 = 0 \rightarrow T_{AC} = \frac{78{,}5}{\sin 30°} \rightarrow T_B = 157N$$

Substituindo em I:

$$T_{AB} - 157 \cdot \cos 30° = 0 \rightarrow T_{AB} = 157 \cdot \cos 30° \rightarrow T_{AB} = 136N$$

d) Comprimento dos Cabos:

Alongamento da mola (F = k × s):

$$T_{AB} = k_{AB} \cdot s_{AB} \rightarrow 136 = 300 \cdot s_{AB}$$

$$s_{AB} = \frac{136}{300} \rightarrow s_{AB} = 0{,}453m$$

Comprimento deformado da mola:

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB} \rightarrow l_{AB} = 0{,}4 + 0{,}453 \rightarrow l_{AB} = 0{,}853m$$

Comprimento do cabo AC:

$$2m = l_{AC} \cdot \cos 30° + l_{AB} \rightarrow 2m = l_{AC} \cdot \cos 30° + 0{,}853$$

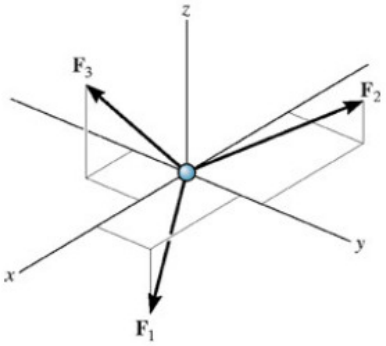
$$l_{AC} = \frac{2 - 0{,}853}{\cos 30°} \rightarrow l_{AC} = 1{,}32m$$

Sistema de Forças Tridimensionais

No caso de um sistema de forças tridimensionais, podemos decompor as forças em suas respectivas componentes **i, j, k**, de modo que $\sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\mathbf{j} + \sum F_z\mathbf{k} = 0$. Para satisfazer a condição de equilíbrio é necessário que:

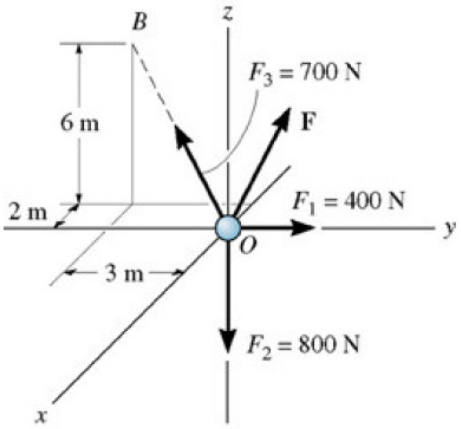
$$\sum F = 0 \quad \therefore \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

Portanto a solução é obtida por um sistema de três equações e três incógnitas.



Exemplo:

1) Determine a intensidade e os ângulos diretores da força F necessários para o equilíbrio do ponto O.



Solução:

a) Determinação das forças:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$\vec{F}_1 = (400\vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (-800\vec{k})$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB}$$

b) Vetor unitário e vetor posição

$$\vec{u}_{OB} = \frac{\vec{r}_{OB}}{r_{OB}}$$

$$\vec{r}_{OB} = (-2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k})m$$

$$r_{OB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \rightarrow r_{OB} = 7m$$

$$\vec{u}_{OB} = \frac{-2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{OB} = -0{,}286\vec{\imath} - 0{,}429\vec{\jmath} + 0{,}857\vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB} \rightarrow \vec{F}_3 = 700 \cdot (-0{,}286\vec{\imath} - 0{,}429\vec{\jmath} + 0{,}857\vec{k})$$

$$\vec{F}_3 = (-200\vec{\imath} - 300\vec{\jmath} + 600\vec{k})N$$

c) Condição de equilíbrio:

$$\sum F = 0 \rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F} = 0$$

$$400\vec{\jmath} - 800\vec{k} - 200\vec{\imath} - 300\vec{\jmath} + 600\vec{k} + F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = 0$$

d) Sistemas de equações:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -200 + F_x \rightarrow F_x = 200N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 400 - 300 + F_y \rightarrow F_y = -100N$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -800 + 600 + F_z \rightarrow F_z = 200N$$

e) Vetor força **F**

$$F = (200\vec{\imath} - 100\vec{\jmath} + 200\vec{k})N$$

f) Módulo de **F**

$$F = \sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2} \rightarrow F = 300N$$

g) Ângulos diretores de **F**:

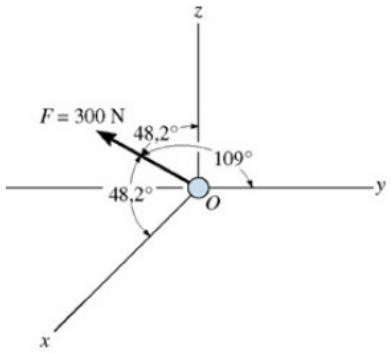
$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F} \rightarrow \vec{u}_F = \frac{200\vec{\imath} - 100\vec{\jmath} + 200\vec{k}}{300}$$

$$\vec{u}_F = \frac{200}{300}\vec{\imath} - \frac{100}{300}\vec{\jmath} + \frac{200}{300}k$$

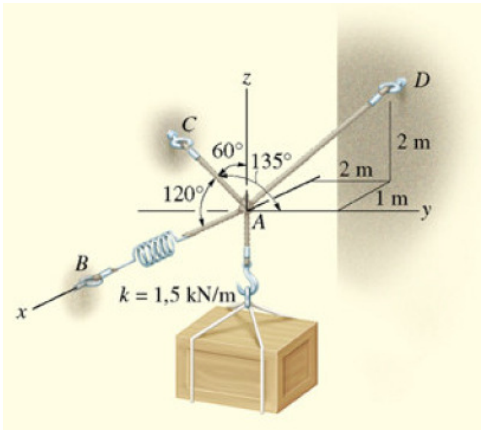
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-100}{300}\right) \rightarrow \beta = 109°$$

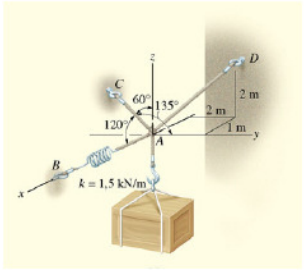
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \gamma = 48{,}2°$$

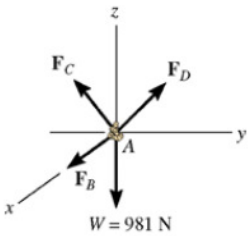


2) A caixa de 100kg mostrada na figura é suportada por três cordas, uma delas é acoplada na mola mostrada. Determine a força nas cordas AC e AD e a deformação da mola.



a) Determinação das forças:





$$\vec{F}_B = (F_B\vec{\imath})N$$

$$\vec{F}_C = (F_C \cdot \cos 120°\,\vec{\imath} + F_C \cdot \cos 135°\,\vec{\jmath} + F_C \cdot \cos 60°\,\vec{k})N$$

$$\vec{F}_C = (-0{,}5 \cdot F_C\vec{\imath} - 0{,}707 \cdot F_C\vec{\jmath} + 0{,}5 \cdot F_C\vec{k})N$$

$$\vec{P} = (-981\vec{k})N$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$

b) Vetor unitário e vetor posição

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}}$$

$$\vec{r}_{AD} = (-1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k})m$$

$$r_{AD} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \rightarrow r_{AD} = 3m$$

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\vec{u}_{AD} = -0{,}333\vec{\imath} + 0{,}667\vec{\jmath} + 0{,}667\vec{k}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD} \rightarrow \vec{F}_D = F_D \cdot (-0{,}333\vec{\imath} + 0{,}667\vec{\jmath} + 0{,}667\vec{k})$$

$$\vec{F}_D = (-0{,}333 \cdot F_D\vec{\imath} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{\jmath} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k})N$$

c) Condição de equilíbrio:

$$\sum F = 0 \rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{P} = 0$$

$$F_B\vec{\imath} - 0{,}5 \cdot F_C\vec{\imath} - 0{,}707 \cdot F_C\vec{\jmath} + 0{,}5 \cdot F_C\vec{k} - 0{,}333 \cdot F_D\vec{\imath} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{\jmath} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k} - 981\vec{k} = 0$$

d) Sistemas de equações:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \text{ (I)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0 \text{ (II)}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 0{,}5 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D - 981 = 0 \text{ (III)}$$

Solução das equações:

De (II):

$$0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0$$

$$F_D = \frac{0{,}707 \cdot F_C}{0{,}667} \rightarrow F_D = 1{,}059 \cdot F_C \text{ (IV)}$$

Substituindo (IV) em (III):

$$0{,}5 \cdot F_C + (0{,}667 \cdot (0{,}667 \cdot F_C)) - 981 = 0$$

$$0{,}5 \cdot F_C + 0{,}706 \cdot F_C - 981 = 0 \rightarrow 1{,}207 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$F_C = \frac{981}{1{,}207} \rightarrow F_C = 813N$$

Em (IV):

$$F_D = 1{,}059 \cdot F_C \rightarrow F_D = 1{,}059 \cdot 813 \rightarrow F_D = 862N$$

Em (I):

$$F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \rightarrow F_B - 0{,}5 \cdot 813 - 0{,}333 \cdot 862 = 0$$

$$F_B = 406{,}5 + 287{,}04 \rightarrow F_B = 693{,}7N$$

e) Deformação da mola (F = k × s):

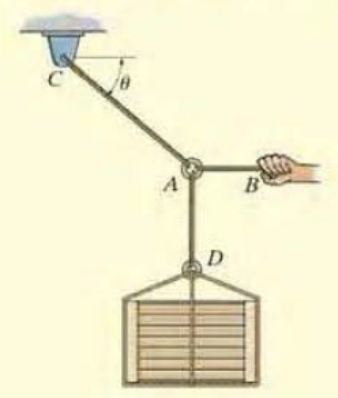
$$F_B = k_B \cdot s_B \rightarrow 693{,}7 = 1500 \cdot s_B$$

$$s_B = \frac{693{,}7}{1500} \rightarrow s_B = 0{,}462m$$

Lista de Exercícios

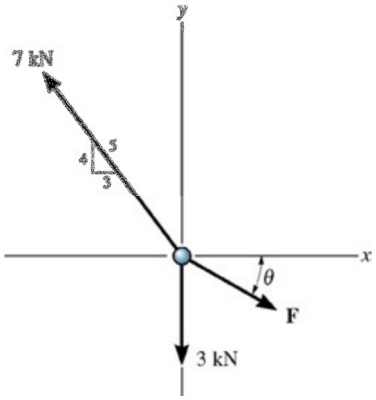
1) **Responda as questões de equilíbrio em duas e três dimensões**:

a) A caixa de 200kg da figura é suspensa usando as cordas AB e AC. Cada corda pode suportar uma força máxima de 10kN antes de se romper. Se AB sempre permanece horizontal, determine o menor ângulo θ para o qual a caixa pode ser suspensa antes que uma das cordas se rompa.



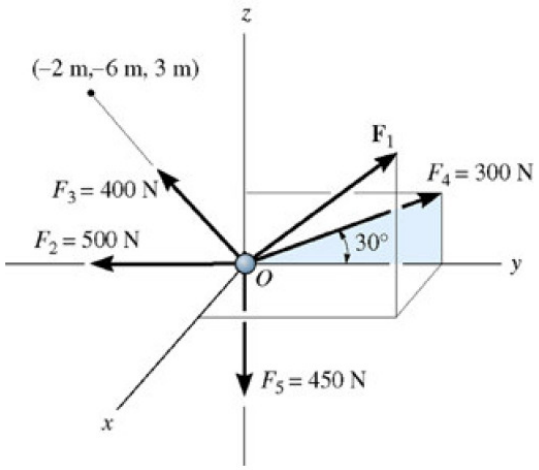
Resp.: F_B=9,81kN e θ =11,31°

b) Determine o ângulo θ e a intensidade de F de modo que o ponto material esteja em equilíbrio estático.



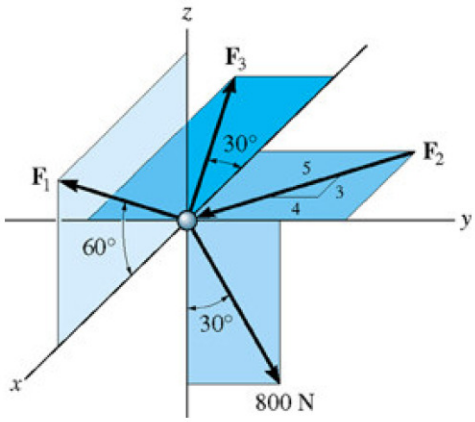
Resp.: F=4,94kN e θ =31,8°

c) Determine a intensidade e o sentido de F_1 necessários para manter o sistema de forças concorrentes em equilíbrio.



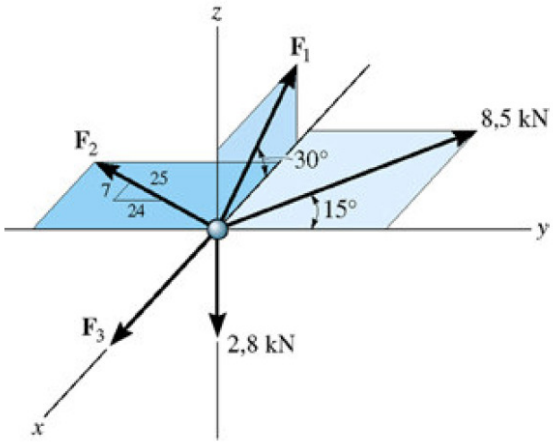
Resp.: F_1=607,89N, α=79,2°, β=16,4°e γ=77,8°

d) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



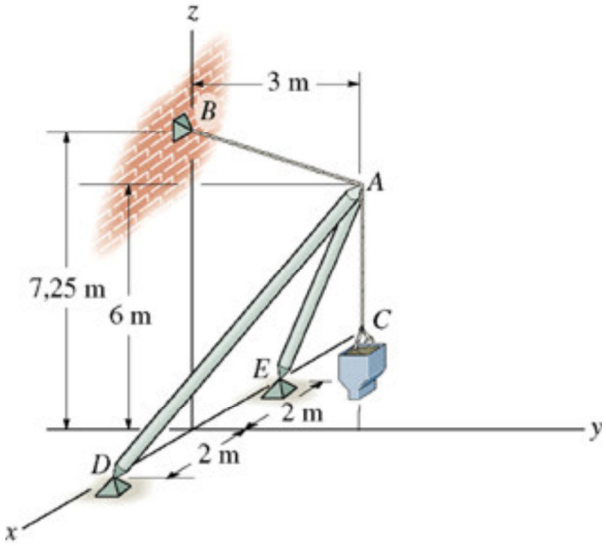
Resp.: F_1=800N, F_2=147N e F_3=564N

e) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



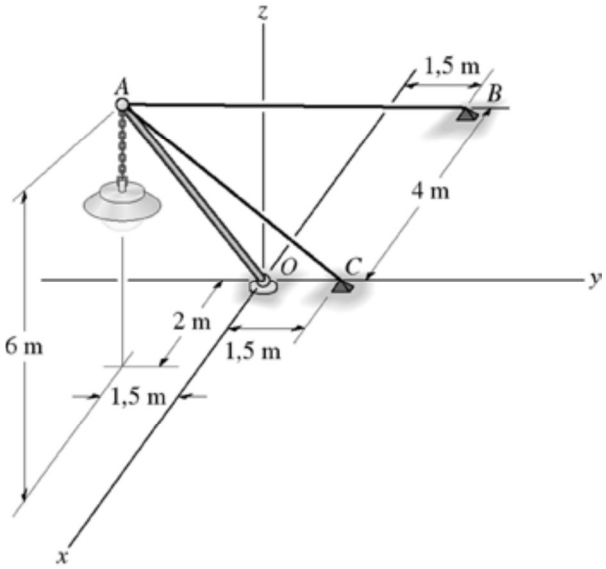
Resp.: F_1=5,60kN, F_2=8,55kN e F_3=9,44kN

f) O cabo suporá O cabo suporta a caçamba e seu conteúdo que tem massa total de 300kg. Determine as forças desenvolvidas nas escoras AD e AE e a força na parte AB do cabo para a condição de equilíbrio. A força em cada escora atua ao longo do seu próprio eixo.



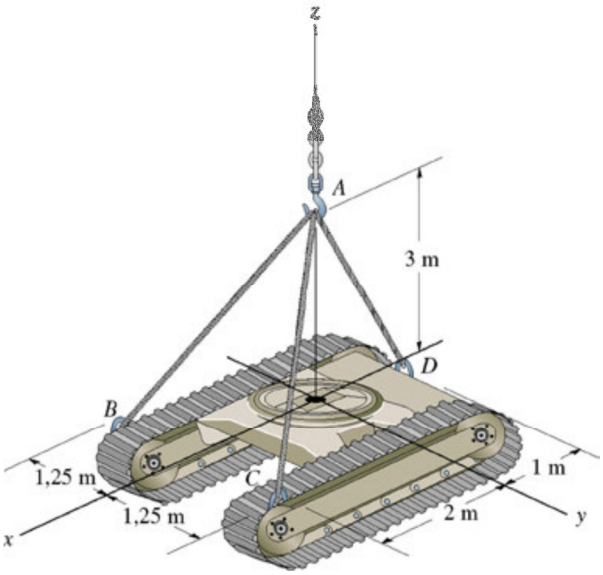
Resp: $F_{AE}=F_{AD}$ = 1240,76N e F_{AB}=1319,28N

g) Os cabos AB e AC suportam uma tração máxima de 500N e o poste, uma compressão máxima de 300N. Determine o peso da luminária sustentada na posição mostrada. A força no poste atua alongo de seu próprio eixo.



Resp: P=138N

h) Determine a força necessária em cada um dos três cabos para levantar a escavadeira que tem massa de 8 toneladas.



Resp: $F_{AB}=F_{AC}$ = 16,6kN e F_{AD}=55,2kN